

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 52

Representaties van Lie-groepen en  
elementaire deeltjes (het  $SU_3$ -model)

door

E.R. Paerl



maart 1968

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

## Representaties van Lie-groepen en elementaire deeltjes (het $SU_3$ -model) \*)

### Inleiding.

Deze voordracht betreft een gebied van toegepaste wiskunde, dat reikt van de theorie van de Liegroepen tot de fysica van de elementaire deeltjes zoals deze tegenwoordig in de hoge-energie laboratoria plaats vindt.

De breedte van dit gebied is dan ook de oorzaak dat fysici en wiskundigen op geheel verschillende wijze over Liegroepen kunnen praten.

Enerzijds is de betreffende wiskundige literatuur zeer algemeen en voor fysici vaak moeilijk leesbaar, anderzijds is hetgeen fysici over Liegroepen geschreven hebben moeilijk toegankelijk voor wiskundigen door het gebruik van specialistische termen en mede door het feit dat veel van de literatuur nog over talloze tijdschriftartikelen en verslagen van seminaria etc. verspreid is. Hiermee is dan ook het doel van deze voordracht aangegeven, nl. in kort bestek voor wiskundigen informatie te geven over wat er heden ten dage in de fysica aan dit deel van de groepentheorie gedaan wordt.

Er wordt slechts geringe kennis van representatietheorie voor verondersteld.

Een indrukwekkend voorbeeld van het gebruik van groepen in de fysica is, mijns inziens, het zg.  $SU_3$ -model.

De tekst van deze voordracht valt in 3 delen uiteen:

1. Wiskundige inleiding tot de groep  $SU_3$ .
2. Algemene beschrijving van het gebruik van Liegroepen in de fysica.
3. In het bijzonder de groep  $SU_3$  in de elementaire deeltjes fysica.

Aan het eind van elke paragraaf wordt een overzicht gegeven van de gebruikte literatuur.

---

\*) Tekst van voordracht gehouden op 7 februari 1968 in het Mathematisch Instituut Amsterdam.

## 1. Representatietheorie van $SU_3$

### 1.1. De groep $SU_3$

De groep  $SU_3$  is gedefiniëerd als de verzameling van alle complexe  $3 \times 3$  matrices  $U$ , die *unitair* zijn:  $U^+ = U^{-1}$  en *unimodulair*:  $\det U = +1$ . Een complexe  $3 \times 3$  matrix bevat 9 complexe getallen, dus 18 reële getallen, en men kan nagaan, dat met bovenvermelde voorwaarden er 8 onafhankelijke parameters over blijven. Wij zullen deze parameters  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_8$  noemen en men zegt dat  $SU_3$  een *8-parameter groep* is. Wij veronderstellen dat  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8 = 0, \dots, 0$  met de identiteit  $E$  correspondeert.

In het bijzonder zijn wij geïnteresseerd in abelse ondergroepen van  $SU_3$ . Een dergelijke ondergroep wordt bv. gegeven door de matrices:

$$M = \begin{pmatrix} e^{ix_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ix_3} \end{pmatrix}, \text{ waarbij } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \pmod{2\pi}$$

Men ziet dat deze abelse ondergroep twee onafhankelijke parameters bezit en er geldt nu dat de *maximaal abelse ondergroep* (de abelse ondergroep van maximale dimensie) van  $SU_3$  2-parameterig is. Wij zullen de bij  $M$  behorende parameters soms  $\mu_1, \mu_2$  noemen en  $SU_3$  bezit dus de parameters  $\mu_1, \mu_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_8$ . Men drukt dit ook wel als volgt uit door te zeggen dat  $SU_3$  een *8-parameterige groep van de rang 2* is.

### 1.2. Representaties van $SU_3$

Een representatie van  $SU_3$  is gedefiniëerd als een afbeelding  $D$  van de  $3 \times 3$  matrices  $U$  op  $n \times n$  matrices  $D(U)$  dus  $D: U \rightarrow D(U)$  zodat producten voor de pijl corresponderen met producten achter de pijl,

$UV \rightarrow D(UV) = D(U)D(V)$ . Nauwkeuriger:  $D$  is een continu-homomorfisme. Voorbeelden van representaties zijn:

alle $U \rightarrow 1$	de 1-dimensionale representatie
$U \rightarrow U$	de 3-representatie
$U \rightarrow \bar{U}$	de $\bar{3}$ -representatie
.	.
.	.
.	etc.

Een van de belangrijkste taken van de representatietheorie van  $SU_3$  is het klassificeren van *alle* representaties van  $SU_3$ . Men voert daartoe zoals bekend

1.2.a. Infinitesimale operatoren  $D_i$  in. Stel gegeven een  $(n \times n)$  representatie  $D(U)$  dan is de matrix  $D(U)$  een functie van de parameters  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_8$ . De infinitesimale operator  $D_i$  is gedefiniëerd door

$$D_i = \left( \frac{\partial D(\epsilon)}{\partial \epsilon_i} \right)_{\epsilon=0} \quad (\text{iedere component van } D \text{ wordt naar } \epsilon_i \text{ gedifferentieerd}).$$

De infinitesimale operatoren die horen bij de parameters  $\mu_1, \mu_2$  noemen wij  $M_1, M_2$ , de overigen  $E_{+1}, E_{+2}, E_{+3}$ .

De commutativiteit van de groep  $M$  correspondeert met de relatie

$$M_1 M_2 - M_2 M_1 = 0 \text{ of met het Lieproduct: } [M_1, M_2] = 0.$$




Uitgaande van  $SU_3$  zijn ook de overige *verwisselings relaties*  $[M_1, E_{+i}]$ , etc. af te leiden.

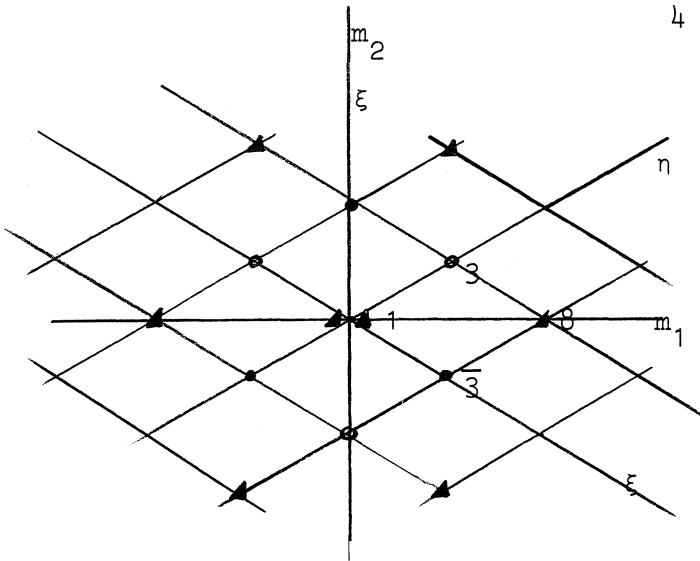
Omdat  $SU_3$  een compacte groep is, zijn de infinitesimale operatoren  $M_1, M_2, E_{+i}$  hermitisch te maken en wij kunnen dus bij een  $n$ -dimensionale representatie  $n$  orthonormale eigenvectoren vinden van bv.  $M_1$  die de representatie ruimte opspannen. Omdat  $M_1$  en  $M_2$  commuteren,  $[M_1, M_2] = 0$ , is er zelfs één basis van simultane eigenvectoren  $v$  zodat

$$M_1 v = m_1 v$$

$$M_2 v = m_2 v.$$


Wij voorzien  $v$  van de indices  $m_1, m_2$ , d.w.z.  $v_{m_1, m_2} \equiv \vec{v}_m$ , en noemen  $(m_1, m_2)$  het *gewicht* van  $v$ .

1.2.b. Het gewichtsdiagram. Wij zetten de vectoren  $\vec{m}$  uit in een z.g. *gewichts- of eigenwaarde diagram*, wat dus een 2-dimensionaal *spectrum* is van de operatoren  $M_1$  en  $M_2$ . De 1-representatie  $U \rightarrow 1$  geeft als infinitesimale operatoren: 0 en dus vinden wij één gewicht  $(m_1, m_2) = (0, 0)$ , zie in de figuur:  1. Beschouwt men de 3-representatie  $U \rightarrow U$  dan vindt men 3 eigenvectoren, waarvan de 3 eigenwaarden  $(m_1, m_2)$  in de figuur uitgezet zijn, zie de driehoek  3. Evenzo wordt de  $\bar{3}$ -representatie  $U \rightarrow \bar{U}$  gegeven door de driehoek  3. Met behulp van deze

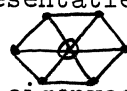


figuur 1.

representaties van  $SU_3$ 

1 repr. ~	•	~ $D^{00}$
3 repr. ~	$\nabla$	~ $D^{01}$
$\bar{3}$ repr. ~	$\triangle$	~ $D^{10}$
8 repr. ~		~ $D^{11}$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

tabel 2.

twee driehoeken kan men een rooster  $\Gamma$  tekenen en er geldt nu, dat van iedere representatie van  $SU_3$  de gewichten punten van het rooster  $\Gamma$  bezetten. Bij voorbeeld, is er een 8-dimensionale representatie van  $SU_3$ , waarvan de gewichten  $\vec{m}$  gegeven worden door de figuur:  Wij merken op dat er in de 8-representatie blijkbaar 2 eigenvectoren zijn met gewicht  $(0,0)$ .

Enkele eigenschappen van deze gewichtsdiagrammen zijn:

- a. De figuren zijn invariant voor spiegeling t.o.v. de lijnen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ . Hierdoor is het mogelijk iedere figuur te karakteriseren door een hoekpunt in de  $(\xi, \eta)$ -sector, dus de 3-representatie wordt gekarakteriseerd door  $D^{\xi\eta} = D^{01}$ , de  $\bar{3}$ -representatie door  $D^{\xi\eta} = D^{10}$ , ... etc. zie tabel 2.
- b. De infinitesimale operatoren  $E_{+1}$ ,  $E_{+2}$ ,  $E_{+3}$  werken in de n-dimensionale representatie ruimte volgens de onderstaande figuur 3. In het

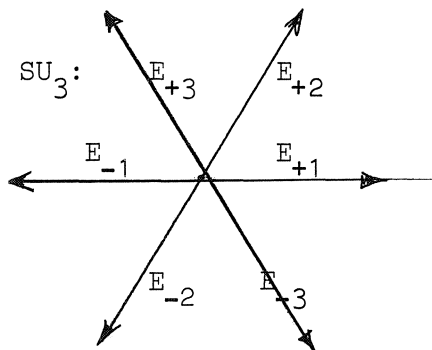


fig. 3

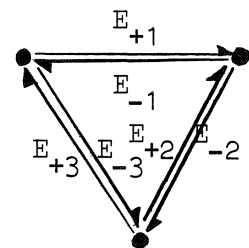


fig.4

bijzonder toegepast op de 3-representatie werken de operatoren  $E_{+i}$  volgens figuur 4, dus de vector  $\vec{v}_{\vec{m}}$  met gewicht  $\vec{m}(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, +\frac{1}{2})$  wordt door  $E_{+1}$  getransformeerd in een vector  $\vec{v}_{\vec{m}'}$ , met gewicht  $\vec{m}'(+\frac{1}{2}\sqrt{3}, +\frac{1}{2})$ , nog eens  $E_{+1}$  op  $\vec{m}'$  toegepast geeft 0, etc. Er geldt dan ook dat de groep  $SU_3$  gekarakteriseerd wordt door het *kristal* gegeven in figuur 3.

1.2.c. Algemene opmerkingen. De bovenbeschreven methode is van toepassing op alle half-enkelvoudige Liegroepen. Bijvoorbeeld nemen wij de orthogonale groep in 5 dimensies  $O_5$ , welke 10 parameterig en óók van de rang 2 is. Deze wordt gekarakteriseerd door het kristal van figuur 5.

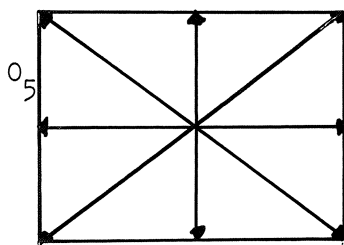


fig.5

theorie zegt dat al deze groepen te karakteriseren zijn door *l-dimensionale kristallen*. Aan dit resultaat is in de eerste plaats de naam van *Cartan* verbonden en verder de namen van *Killing*, *van der Waerden*, *Coxeter*. *Hopf* en *Stiefel* zijn tot een zelfde resultaat gekomen zonder gebruikmaking van de theorie van de infinitesimale operatoren (zie het artikel van *Speiser*).

In het algemeen zijn er  $r$ -parameterige (half-enkelvoudige) Liegroepen met de rang  $l$  met infinitesimale operatoren

$$M_1, \dots, M_l, D_{l+1}, \dots, D_r$$

zodat  $[M_i, M_j] = 0$ .

Een fundamentele stelling uit de

### 1.3. Bewerkingen met representaties

#### 1.3.a. Tensorsommen

De tensorsom  $v + w$  van de  $n$ -dimensionale vector  $v = v^i \vec{v}_i$  en de  $m$ -dimensionale vector  $w = w^j \vec{w}_j$  is de  $(n+m)$ -dimensionale vector  $(v, w) \equiv (v^i, w^j)$ . De eigenwaarden  $\vec{m}$  in de somruimte krijgt men door alle eigenwaarden uit de oorspronkelijke deelruimten te nemen. Bv.

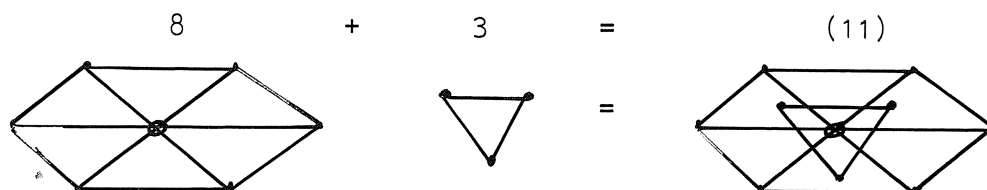


fig. 6

### 1.3.b. Tensorproducten

Onder het tensorproduct  $v \times w$  verstaat men de  $(n \cdot m)$ -dimensionale vector met componenten  $v^i w^j$  t.o.v. de basis van formele paren  $\vec{v}_i \times \vec{w}_j$ . De representatie die in de productruimte werkt is gedefiniëerd volgens

$$D(v \times w) = D(v) \times D(w),$$

als  $v' = D(v)$  en  $w' = D(w)$  gedefiniëerd zijn.

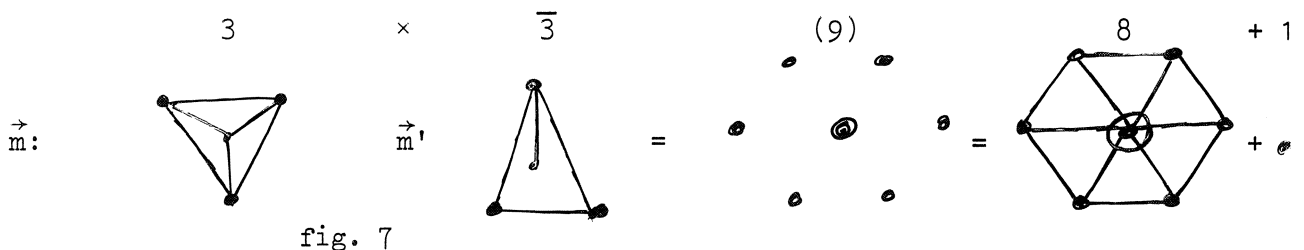
Na differentiatie geldt voor de infinitesimale operatoren  $D_i$ , i.h.b.  $M_i$ :

$$M_i(v \times w) = M_i(v) \times w + v \times M_i(w).$$

Stel  $v$  en  $w$  hebben het gewicht  $\vec{m}$  en  $\vec{m}'$  respectievelijk, dan geldt

$$\begin{aligned} M_i(v_{\vec{m}} \times w_{\vec{m}'}) &= m_i v_{\vec{m}} \times w_{\vec{m}'} + m'_i v_{\vec{m}} \times w_{\vec{m}'} \\ &= (m_i + m'_i) v_{\vec{m}} \times w_{\vec{m}'}. \end{aligned}$$

Dus het tensorproduct  $v_{\vec{m}} \times w_{\vec{m}'}$  heeft het gewicht  $\vec{m} + \vec{m}'$ . Op deze wijze kunnen wij gemakkelijk tensorproducten uitrekenen. Bv.



Wij nemen eerst alle vectoren  $v_{\vec{m}}$  uit de 3-representatie en een vaste vector  $w_{\vec{m}'}$  uit de  $\bar{3}$ -representatie en bepalen alle producten  $v_{\vec{m}} \times w_{\vec{m}'}$  door de driehoek die alle gewichten  $\vec{m}$  geeft met het middelpunt op  $\vec{m}'$  te plaatsen, op deze wijze krijgen wij de 3 termen  $\vec{m} + \vec{m}'$ . Gaat men op deze wijze alle vectoren  $w_{\vec{m}'}$  langs, dan krijgt men dus 9 gewichten  $\vec{m} + \vec{m}'$  (zie figuur 7).

Het is duidelijk uit de figuur, dat deze 9-dimensionale representatie reducibel is (als som van representaties  $D^{\xi\eta}$  is voor te stellen), nl. in de 8-representatie ( $D^{11}$ ) en de 1-representatie  $D^{00}$ .



### 1.3.c. Algemene opmerkingen

Voor Liegroepen van de rang  $l > 3$  voldoet deze grafische methode om representaties met elkaar te vermenigvuldigen natuurlijk niet meer. Hiervoor is de karakter-theorie door H. Weyl ontwikkeld, die dergelijke puntverzamelingen analytisch beschrijft (zie bijv. het zeer lezenswaardige artikel van Behrends, e.a.).

### Een greep uit de literatuur

Twee artikelen uit: Gürsey, Group theoretical concepts and methods in Elementary Particle Physics, Gordon and Breach, 1964, namelijk:

G. Racah, Lectures on Lie Groups

D. Speiser, Theory of Compact Lie groups and some Applications to Elementary Particle Physics.

In het bijzonder wordt aanbevolen:

R.E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal and W. Lee, Simple Groups and Strong Interaction Symmetries, Rev. of Mod. phys., 34, 1, 1962, verder:

L.S. Pontrjagin, Topologische Gruppen, teil 2, p. 225-300, Teubner, Leipzig, 1958.

G. Flach und R. Reif, Gruppen theoretische methoden im Schalenmodell der Kerne I, Akad. Verlag Berlin, 1964.

## 2. Toepassingen van Liegroepen in de fysica

Wij beschouwen een *fysisch systeem*, zoals bv.:

1. een magneetveld gericht langs de z-as,
2. een rotatie-symmetrisch electrisch veld om een punt,
3. een homogeen veld, ... etc.

Bij een dergelijk fysisch systeem hoort een Liegroep  $G$  welke *de symmetrie van dat systeem beschrijft*. Dit wil zeggen,  $G$  bestaat uit alle transformaties  $g$  welke de fysische eigenschappen van het systeem invariant laten. Zo hoort bij de bovenvermelde voorbeelden respectievelijk de:

1. rotatiegroep om de z-as,
2. rotatiegroep in 3-dimensies,
3. translatiegroep.

Wij veronderstellen nu, dat deze Liegroep  $r$ -parameterig is en van de rang 1.

Zoals bekend, wordt in de quantummechanica de toestand van een deeltje in een dergelijk veld beschreven door de vector-functie  $\psi(\vec{x}, t)$ , waarbij de functie  $\psi$  i.h.a.  $n$ -componenten kan bezitten  $\psi \equiv (\psi^1(\vec{x}, t), \dots, \psi^n(\vec{x}, t))$ . Met een transformatie  $g$  uit de Liegroep  $G$  correspondeert een transformatie van de functie  $\psi$ . Men veronderstelt dat deze transformatie lineair is en in het bijzonder dat  $\psi$  *zich transformeert volgens representaties van de Liegroep  $G$* .

$$\psi'(\vec{x}', t') = D(g)\psi(\vec{x}, t), \quad (\vec{x}', t') = g(\vec{x}, t).$$

Wij kunnen de volgende gevolgtrekkingen maken:

- (a) Een klassificatie van representaties  $D(g)$  levert een klassificatie van vectoren  $\psi$  en geeft dus een *klassificatie van toestanden waarin het systeem zich kan bevinden*.

Bijvoorbeeld in het periodiek systeem van elementen bezitten de bezettingsgetallen 2, 6, 10, ... van elektronenbanen in een atoom, groepentheoretische betekenis. In het bijzonder gaat het hier om representaties van de 3-dimensionale rotatiegroep i.v.m. het rotatie-symmetrische veld van de kern.

(b) Een (ongebonden) systeem van 2 deeltjes wordt beschreven door het product  $\phi \times \psi$  van de toestandsfuncties van de 2 deeltjes.

*Het uitreducen van tensorproducten levert ons de toestanden, waarin een systeem van 2 deeltjes zich kan bevinden, als de toestanden van de oorspronkelijke deeltjes zijn gegeven.*

De Liegroep  $G$ , die van de rang 1 is bezit i.h.b. de infinitesimale operatoren  $M_1, \dots, M_l$ , die met elkaar commuteren.

(c) Men kan aantonen dat, als het deeltje  $\psi$  een wel omschreven energie  $E$  heeft, dan geldt dat  $\psi$  tevens eigenvector is van de operatoren  $M_1, \dots, M_l$ , d.w.z.

$$M_i \psi = m_i \psi.$$

Bovendien zijn de getallen  $m_i$  constant in de tijd en men zegt dan ook dat het fysische systeem  $l$  *quantumgetallen*  $m_i$  bezit. Nauwkeuriger: wij hebben gezien dat bij een systeem van 2 deeltjes de quantumgetallen  $\vec{m}$  en  $\vec{m}'$  zich *additief* samenstellen tot  $\vec{m} + \vec{m}'$  en men noemt  $m_i$  dan ook *additieve quantumgetallen*. Er geldt dus:

*Bij een fysisch systeem met een Liegroep van de rang  $l$  die de symmetrie van het systeem beschrijft, behoren precies  $l$  additieve quantumgetallen.*

### Literatuur

A. Messiah, Quantum Mechanics vol. II chapter XV, North-Holland publ. Co. Amsterdam, 1962.

P. Roman, Theory of elementary particles, chapter IV, North-Holland publ. Co., Amsterdam, 1960.

Zie ook:

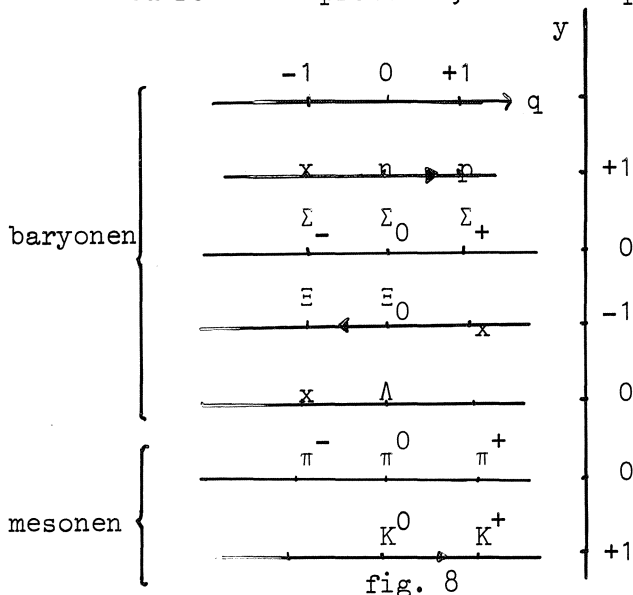
G.J. Ljubarski, Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik, p. 212-223, VEB, 1962.

### 3. Het $SU_3$ -model

#### 3.1. Inleiding

Twee typen zware deeltjes waren in de fysica al lang bekend, nl.

neutronen en protonen, welke respectievelijk de lading 0 en +1 bezitten.



Wij merken op dat er geen soortgelijk exemplaar met lading -1 is. Na 1945 zijn een groot aantal zware deeltjes gevonden (baryonen) met ongeveer dezelfde massa en spin als neutronen en protonen. Wij noemen: het  $\Sigma$ -deeltje (-, 0 en + geladen), het  $\Xi$ -deeltje en het  $\Lambda$ -deeltje. Daarnaast zijn er deeltjes gevonden met een massa, tussen die van de baryonen en elektronen in, de zg. mesonen:  $\pi$ -meson, K-meson, ... etc. In figuur 8 zijn

de genoemde deeltjes met hun ladingen schematisch uitgezet. Om nu deze elementaire deeltjes verder te kunnen karakteriseren heeft men de zg. *hyperlading*  $y$  ingevoerd. Daartoe merkt men op dat het ladingsmiddelpunt van het Nucleon-paar (neutron en proton) een half naar rechts verschoven is en men geeft daarom het nucleon een hyperlading  $+\frac{1}{2}$  (misschien was logischer geweest hyperlading  $+\frac{1}{2}$  in te voeren). Op dezelfde wijze zijn de hyperladings van de overige deeltjes uitgezet. De getallen  $q$  en  $y$ , lading en hyperlading, stellen zich additief samen en blijven bovendien behouden bij *sterke wisselwerking*. Dit zijn wisselwerkingen bij elementaire deeltjes waarbij energieën optreden, die te vergelijken zijn met de energieën in een atoomkern. De volgende regel is als voorbeeld overgeschreven uit een leerboek voor elementaire deeltjes:

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\rightarrow \Lambda + K^0 \\ q &= 0 + 1 \quad 0 + 1 \\ y &= -1 + 1 \quad 0 \quad 0, \end{aligned}$$

en men ziet dat lading en hyperlading bij de interactie tussen protonen en  $\pi^-$ -mesonen behouden blijven.

Wij beschikken dus over een systeem van elementaire deeltjes dat beschreven wordt door 2 *additieve quantumgetallen*  $q$  en  $y$ . In het algemeen neemt men i.p.v. de lading, de zg. *isospin*  $I = q - \frac{1}{2}y$ .

Men heeft nu het volgende model geconstrueerd.

Vat een aantal van deze deeltjes op als één deeltje. Bijvoorbeeld vat alle 8 zware deeltjes op als één deeltje: het *baryon*. Een baryon is dan een 8-dimensionale vector:

$$B = \begin{pmatrix} : \\ : \\ : \\ : \\ : \\ \cdot \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \} \text{ N} \\ \} \text{ } \sum \\ \} \text{ E} \\ \} \text{ } \Lambda \end{array} \right\} . \text{ De vector B kan zich in de toestand } B_n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bevinden. Men zegt dan dat het baryon een neutron is. Analooch hoort bij de

$$\text{toestand } B_p = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ een proton, ... enz. Verder heeft het zin trans-}$$

formaties in deze 8-dimensionale baryon-ruimte te beschouwen. Er geldt nl. dat de energieën die bij sterke wisselwerkingen invariant zijn voor verwisseling van deze deeltjes onderling. Zo heeft men bv. waterstof en heliumkernen beide met 3 deeltjes, die men uit elkaar verkrijgt door  $(n \rightarrow p)$  transformatie, dus door neutronen met protonen te verwisselen. Nl.

	n	p
$H^3$	2	1
$He^3$	1	2

Het blijkt dat deze kernen dezelfde energie-niveaus hebben, de kernkrachten zijn dus onafhankelijk van de lading. Verdere symmetrieën die er tussen deze deeltjes bestaan zijn de volgende: alle hebben gelijke spin en ongeveer gelijke massa. De vraag is dus, welke Liegroep deze symmetrie beschrijven kan en die 2 additieve quantumgetallen toelaat. Nog eens, nu meer mathematisch geformuleerd,

Gevraagd een Liegroep  $G$ , die een 8-dimensionale representatie bezit en van de rang 2 is.

(Men kan aan  $G$  nog meer eisen opleggen, zie hiervoor het artikel van Speiser). Men kan ook in plaats van 8 deeltjes in één schema te beschrijven, proberen bv. 3 deeltjes in één model te beschrijven. Dit laatste is

in 1955 gedaan door Sakata, die  $(n, p, \Lambda)$  beschrijft m.b.v. de 3-representatie van  $SU_3$ .

In 1961 heeft Behrends de volgende 7 baryonen:  $(N, \bar{\Sigma}, \Xi)$  beschreven m.b.v. 7-dimensionale representaties van de groep  $G_2$ .

De groep  $G_2$  is een bijzondere groep en pas geïntroduceerd door van der Waerden.

In 1961 hebben Gell'mann en Neéman de 8-representatie voor  $SU_3$  voorgesteld ter beschrijving van het systeem  $(N, \bar{\Sigma}, \Xi, \Lambda)$  en

in 1963 tenslotte heeft Speiser een groot aantal compacte Liegroepen onderzocht met als aantrekkelijkste kandidaten  $G_2$  of  $SU_3$ .

In het algemeen wordt nu door fysici het  $SU_3$ -model van Gell'mann en Neéman aanvaard i.v.m. het aantal experimenten dat dit model kan verklaren. Wij geven hieronder een korte schets van dit model.

### 3.2. Het $SU_3$ -model

Gell'mann en Neéman identificeren de 2 additieve quantumgetallen  $I$  en  $y$  (isospin en hyperlading) met de eigenwaarden  $m_1, m_2$  van de operatoren  $M_1$  en  $M_2$  van  $SU_3$ . Zetten wij nu de gewichten  $(m_1, m_2)$  van alle zware deeltjes uit dan blijkt dat alle 8 baryonen beschreven worden door de 8-representatie van  $SU_3$ .

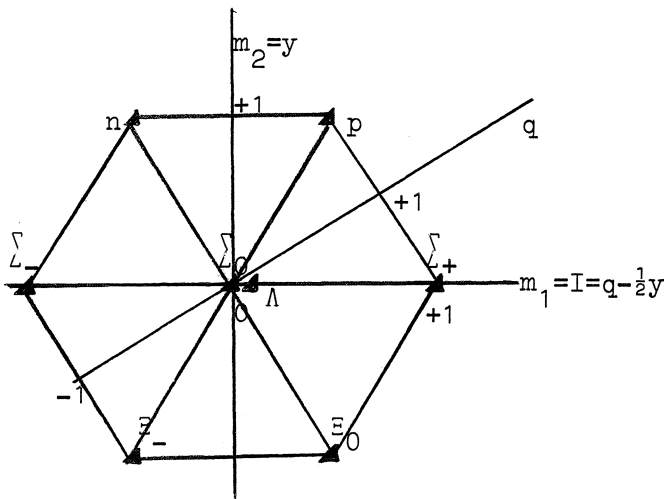


fig. 9

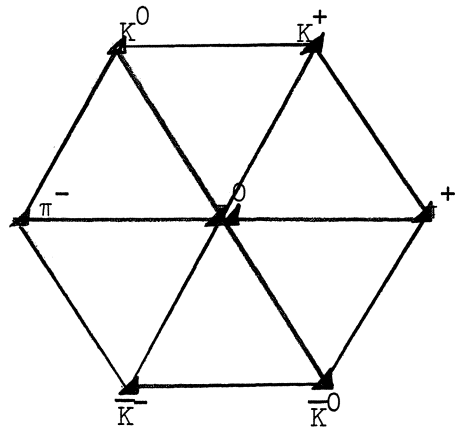


fig. 10

(Opm. het feit dat hier de figuur 9 *niet* precies een regelmatige 6-hoek is, zodat zowel  $\Sigma_+(1,0)$  als  $p(\frac{1}{2},1)$  hoekpunten zijn, berust op een geschikte keus van normerings constanten en is niet essentieel). Bovendien kunnen nu ook de mesonen door de 8-representatie van  $SU_3$  beschreven worden, zie fig. 10. Aan de symmetrie van het systeem ontbrak alleen nog een tweede meson met gewicht  $(I,y) = (0,0)$ . Daartoe namen Gell'mann en Ne'eman het hypothetische  $\eta$ -deeltje aan. Wij geven enkele verdere experimentele veronderstellingen die op grond van het  $SU_3$ -model gemaakt kunnen worden.

(a) Men heeft reden aan te nemen dat de massa verschillen tussen de deeltjes in de eerste plaats evenredig is met het verschil in hyperlading. Het massaverschil tussen nucleon N en  $\Sigma$ -deeltje moet dus gelijk zijn aan het massaverschil  $\Sigma$ -deeltje en E-deeltje. Werkt men dit uit in een formule, dan krijgt men de volgende relatie voor de massa's:

$$\frac{1}{2}(m_N + m_E) = \frac{1}{4}(m_\Lambda + 3m_\Sigma).$$

Aan deze massaformule van Gell'mann, die dus op groepentheoretische overwegingen is opgesteld, blijkt te worden voldaan met een afwijking die kleiner is dan een half procent. Voor het eerst blijkt men hier met groepentheoretische methoden een inzicht te krijgen in de massa-verschillen tussen elementaire deeltjes. Soortgelijke massaformules zijn opgesteld voor mesonen.

(b) Het  $\eta$ -deeltje is in 1962 gevonden met de voorspelde eigenschappen wat betreft hyperlading, lading en massa.

(c) Ook het verloop van interacties kan voorspeld worden. Wij nemen bv.

$$p + \pi^- \rightarrow \dots$$

Beide deeltjes behoren tot de 8-representatie en het totale systeem van de 2 deeltjes wordt beschreven door het tensorproduct  $8 \times 8$ .

Reduceren wij dit product uit dan vindt men:

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8 + 10 + \overline{10} + 27,$$

en men eist nu dat de toestanden waarin het systeem zich na interactie kan bevinden behoort tot een of meer representaties die rechts van het gelijkteken staan (met inachtnaam van behoud van lading en hyperlading). Zo kan deze interactie als volgt verlopen:

$$p + \pi^- \rightarrow \pi^+ + N^{*-},$$

waarbij inderdaad  $\pi^+$  behoort tot de 8-representatie en het negatief geladen "aangeslagen" nucleon  $N^{*-}$  behoort tot de 10-representatie. Met behulp van de coëfficiënten (Clebsch-Gordansche coëfficiënten), die de transformatie van de orthonormale basis van  $8 \times 8$  naar de orthonormale basis in de 1, 8, 8, 10,  $\overline{10}$ , 27 representatie ruimten geeft kan men de waarschijnlijkheid berekenen dat een dergelijke interactie plaats vindt. Deze theoretisch afgeleide waarschijnlijkheden zijn in overeenstemming met het experiment.

(d) Als wij het gewichtsdiaagram van de 10-representatie, waartoe  $N^{*-}$  behoort, tekenen vinden wij:

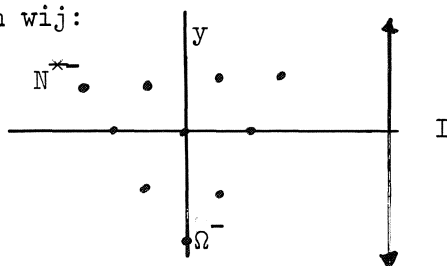


fig. 11

Ook de overige deeltjes die tot de 10-representatie behoren, konden bepaald worden, echter op één deeltje na. Dit ontbrekende deeltje heeft een gewicht  $(I, Y) = (0, -2)$ , dus heeft een lading -1 en heeft blijkbaar geen 0, of + geladen exemplaren naast zich. Tevens moet de massa van dit deeltje groot zijn i.v.m. de grote afstand in het schema t.o.v. de nucleon laag.



In 1965 is dit deeltje het zg.  $\Omega^-$  baryon gevonden met de voorspelde eigenschappen van lading, hyperlading en massa.

### 3.3. Recentere theorieën

Tenslotte volgt nog een opmerking over iets recentere theorieën. Wij hebben gezien dat bij  $SU_3$  in het bijzonder de volgende productregel voor representaties geldt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 & \times & \bar{3} & = & 8 & + & 1 \\
 \triangle & \times & \triangle & = & \text{hexagon} & + & \bullet
 \end{array}$$

Blijkbaar zijn de 3- en  $\bar{3}$ -representaties meer fundamenteel dan de 8-representatie. Er geldt dan ook inderdaad, dat iedere representatie van  $SU_3$  geconstrueerd kan worden uit de 3- en  $\bar{3}$ -representatie door het nemen van tensor-producten.

De 8-representatie beschrijft baryonen. Analooft neemt men nu in de fysica aan, dat de 3-representatie een nieuw deeltje beschrijft, de zg. *quark*. De  $\bar{3}$ -representatie beschrijft dan de *anti-quarks*. Blijkbaar kan dit deeltje zich in 3 toestanden bevinden, er zijn dus 3 typen quarks, en als men het gewichtsdiagram nagaat blijken quarks de lading  $+\frac{1}{3}$  of  $-\frac{2}{3}$  te moeten bezitten. Baryonen zijn dan in deze hypothese samengesteld uit 3 quarks.

Het huidige streven naar het bouwen van krachtiger installaties vindt dan ook zijn oorzaak in het feit dat men hoopt in de toekomst de 8-representatie (baryonen) stuk te kunnen trekken in de 3,  $\bar{3}$ -representaties (quarks).

### Een greep uit de literatuur

Zie de hiervoor genoemde artikelen van Speiser en Behrends en verder:

H.J. Lipkin, Lie groups for pedestrians, North-Holland publ. Co., Amsterdam, 1965.

J.J. de Swart, Symmetries of strong interactions, uit: Proceedings of the 1966 CERN school of physics, Geneva, 1966.

Pas verschenen is:

M. Gourdin, Unitary Symmetries, North-Holland publ. Co., Amsterdam, 1967.

Wat de pogingen betreft, de groep  $SU_3$  en de Lorentzgroep in één model te incorporeren ( $SU_6$  -  $SU_{12}$  model) zie bv.:

F.J. Dyson, Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics, W.A. Benjamin, N.Y., 1966.